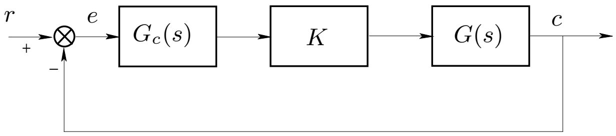
Prova scritta di Controlli Automatici

Bologna, 9 giugno 2014

Si consideri il sistema in retroazione rappresentato dal diagramma a blocchi di Fig. 1.



$$G(s) = \frac{200\,(s+40)}{s\,(s+10)\,(s+100)}.$$

Fig. 1: Sistema in retroazione.

a) Si assuma $G_c(s) = 1$. Si determini l'intervallo dei valori del parametro K per i quali il sistema in retroazione è stabile asintoticamente.

b) Si assuma $G_c(s) = 1$ e $K = 1$. Si traccino, sulle carte logaritmiche allegate, i diagrammi di Bode asintotici (delle ampiezze e delle fasi) della funzione guadagno d'anello $G_\ell(j\omega) = K G_c(j\omega) G(j\omega)$.

c) Si assuma $G_c(s) = 1$. Si tracci il luogo delle radici del sistema in retroazione al variare del parametro $K > 0$. Si determinino, in particolare, il centro della stella degli asintoti e gli angoli formati dagli asintoti con l'asse reale.

d) Si assuma $G_c(s) = 1$. Si determini il valore del parametro K per il quale l'errore a regime nella risposta alla rampa unitaria del sistema ad anello chiuso è $e_r = 0.025$. Si verifichi che per tale valore di K il sistema ad anello chiuso sia stabile asintoticamente.

e) Si assuma $K = 1$. Si progetti il regolatore $G_c(s)$ come la rete correttrice (una sola rete ritardatrice o una sola rete anticipatrice) che assegna al sistema compensato margine di fase $M_f = 60^\circ$ alla pulsazione $\omega = 20\,\mathrm{rad/sec}$. Al fine di dimensionare i parametri α e τ della rete, si suggerisce di utilizzare le formule di inversione[1].

[1] Si ricorda che le formule di inversione per la rete anticipatrice sono

$$\alpha = \frac{M\cos\varphi - 1}{M(M-\cos\varphi)}\,, \qquad \omega\tau = \frac{M-\cos\varphi}{\sin\varphi},$$

e che le stesse formule possono essere applicate al progetto della rete ritardatrice ridefinendo opportunamente i parametri.

$$G(s) = \frac{200(s+40)}{s(s+10)(s+100)}$$

a) Tabella di Routh

$$1 + K\frac{200(s+40)}{s(s+10)(s+100)} = 0$$

$$1 + K\frac{200(s+40)}{s^3+110s^2+1000s} = 0$$

$$s^3 + 110s^2 + 1000s + 200Ks + 8000K = 0$$

$$s^3 + 110s^2 + 200(5+K)s + 8000K = 0$$

3	1	200(5+K)
2	110	8000 K
1	110'000 + 14'000K	0
0	8000K	

$$-\frac{8000K - 22000(5+K)}{\cancel{110}} = 110'000 + 14'000K$$

$110'000 + 14'000K > 0 \Rightarrow 14'000K > -110'000$ $\quad K > -\frac{110}{14} = -7.8571$

$K > 0$ $\quad \Rightarrow K > 0$

b) diagrammi di Bode

c) Angoli formati dagli asintoti con l'asse reale

$$\theta_{a,\nu} = \frac{(2\nu+1)\pi}{n-m} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \\ \frac{3\pi}{2} \end{cases} \qquad \nu = 0, 1$$

$$\sigma_a = \frac{1}{n-m}\left(\Sigma p_i - \Sigma z_i\right) = \frac{1}{2}\left(-10-100+40\right) = -\frac{70}{2} = -35$$

Punto di diramazione: -5.227

d) $e_r = 0.0250 = \frac{1}{40}$

$$k_v = \lim_{s\to 0} k\, s\, G(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\, \frac{200k(s+40)}{\cancel{s}(s+10)(s+100)} = \frac{8000k}{1000} = 8k$$

$$k_v = 8k = 40 \Rightarrow k = 5$$

e) $\omega^* = 20$ rad/sec Rete anticipatrice

$$|G(j\omega^*)| = 0.1961$$

$$\angle G(j\omega^*) = -138.2^\circ =$$

$$M = \frac{1}{|G(j\omega^*)|} = 5.0994$$

$$\varphi_{max} = a\cos \frac{1}{M} = 1.3734 > \varphi = 78.6909$$

la rete è realizzabile

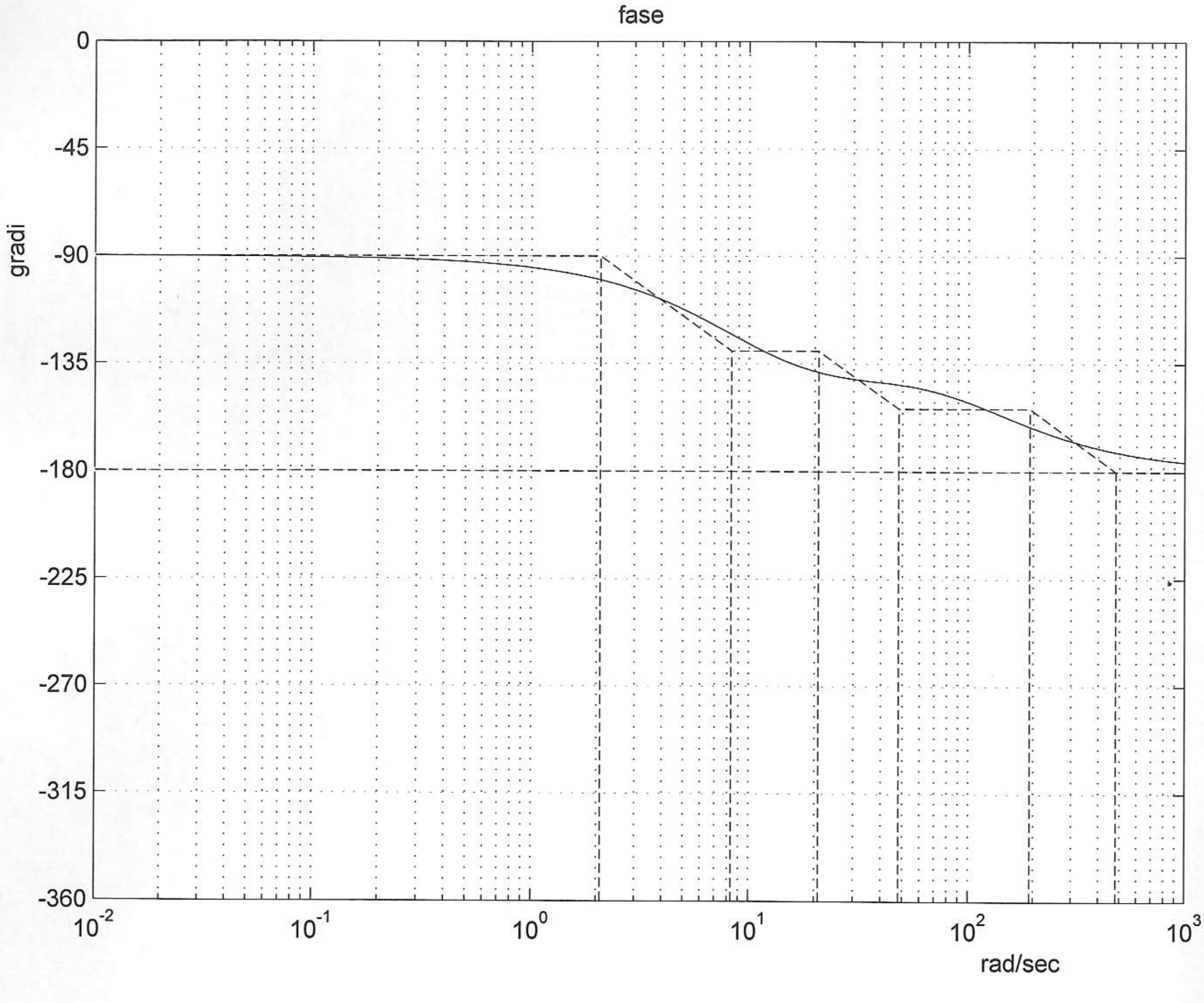
$$\varphi = -120^\circ + 138.2^\circ = 18.2^\circ = 0.3176$$

$$\alpha = \frac{M\cos\varphi - 1}{M(M-\cos\varphi)} = 0.1817$$

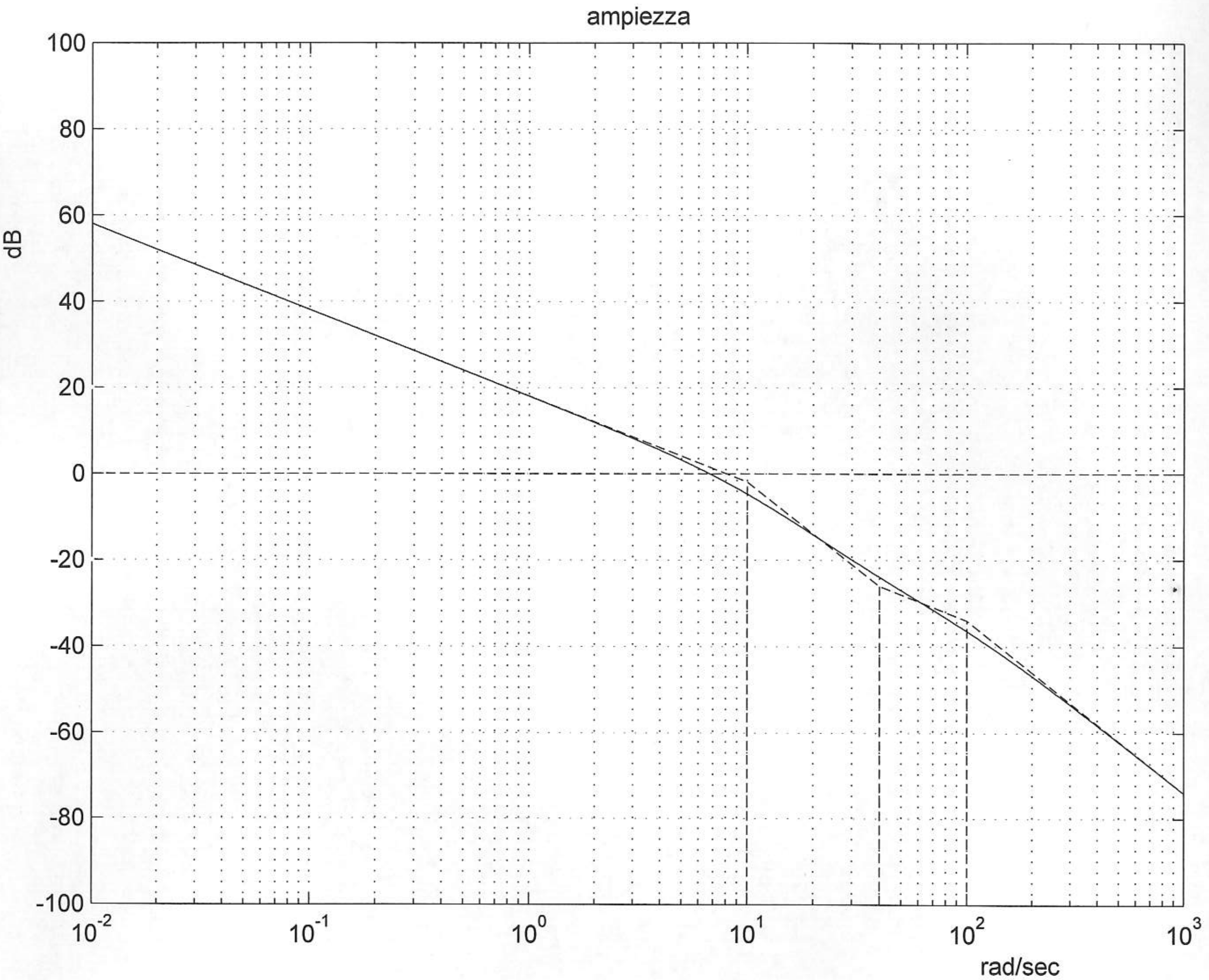
$$\tau = \frac{M - \cos\varphi}{\omega \sin\varphi} = 0.6644$$

$$G_c(s) = \frac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s} = \frac{1+0.6644s}{1+0.1207s} = \frac{5.505(s+1.505)}{s+8.285}$$

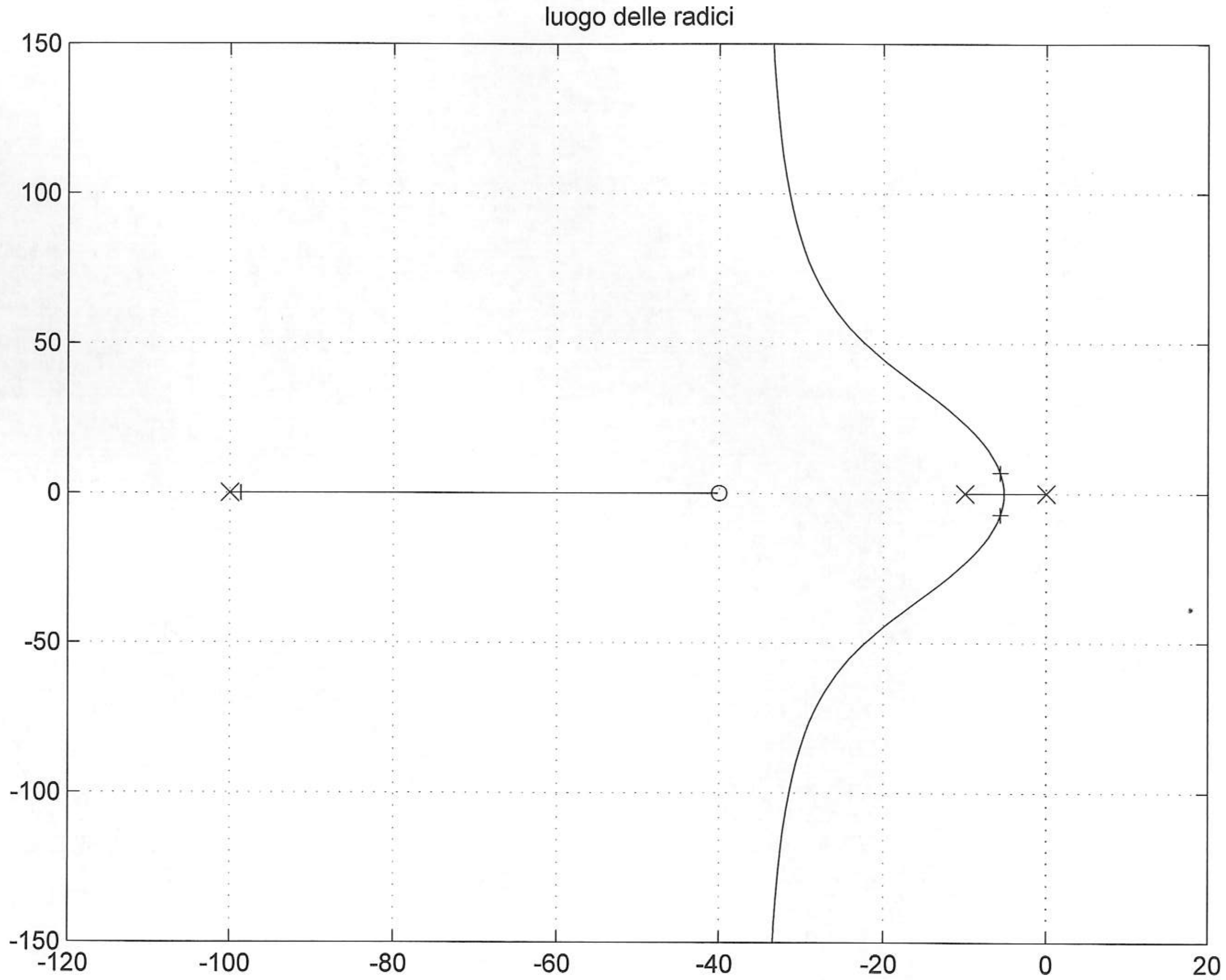
Verifica $m_f = 60.2^\circ$ per $\omega = 20$ rad/sec



fase
0
-45
-90
-135
-180
-225
-270
-315
-360
gradi
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
rad/sec



ampiezza
dB
rad/sec
100
80
60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
10^-2
10^-1
10^0
10^1
10^2
10^3


luogo delle radici
150
100
50
0
-50
-100
-150
-120
-100
-80
-60
-40
-20
0
20